

Initiation aux ondelettes

■ Nicolas MORIZET

ISEP, Département Électronique

Mots clés

Transformée de Fourier,
Transformée de Gabor
Ondelettes,
Analyse temps-fréquence

Une approche pédagogique des ondelettes, de leurs origines aux applications actuelles dans les domaines du traitement du signal et de l'image.

1. Introduction

« Les choses devraient être rendues aussi simples que possible, mais pas plus simples. » (Albert Einstein). Cette remarquable citation du physicien allemand est intéressante pour deux raisons qui nous concernent ici. D'une part, elle reflète assez bien le concept fondamental de l'analyse en traitement du signal, selon lequel on cherche à décomposer des signaux complexes en éléments simples. D'autre part, elle résume tout à fait le défi pédagogique que doit relever cet article : Il s'agit de pouvoir relier la théorie des ondelettes à des exemples concrets et des analogies simples, sans pour autant négliger d'approfondir certains points qui montrent la richesse et le formidable potentiel des ondelettes.

Les ondelettes ont permis à de nombreux spécialistes de sujets mathématiques et physiques qui s'ignoraient mutuellement, de se rencontrer, de parler un langage commun et de former une véritable « Communauté des ondelettes ». Malheureusement, aborder les ondelettes est avant tout une question de courage et de volonté car les premières lectures sont plutôt difficiles et abstraites.

L'analyse de Fourier est incontournable dans le traitement des signaux continus. Néanmoins, elle possède une certaine faiblesse dans le traitement des signaux comprenant des zones d'instationnarités. Le problème réside dans le fait que ces signaux transitoires sont largement représentés dans le monde physique qui nous entoure : dans le domaine biomédical (électro-encéphalogramme (EEG), électrocardiogramme (ECG)), en géophysique et sismologie (détection de séismes), analyse de turbulences, etc.

Les ondelettes, de part leur nature, sont devenues nécessaires pour analyser ces phénomènes non stationnaires

et constituent un outil formidable en traitement du signal et de l'image.

Dans cet article, nous allons ensemble décrypter l'univers fascinant des ondelettes. Nous ferons tout d'abord une présentation du contexte qui a donné naissance à la transformée en ondelettes, puis nous étudierons de plus près les ondelettes pour finalement se concentrer sur quelques applications actuelles en traitement du signal et de l'image.

2. Rappel de deux transformées classiques

Nous commencerons par redonner les notions fondamentales de la transformée de Fourier pour ensuite étudier la transformée de Gabor. Tout au long de ces rappels, nous insisterons sur deux phases essentielles en traitement du signal : l'analyse et la synthèse. L'analyse consiste à déployer un signal dans un espace transformé ; elle est, en général, facile tandis que la synthèse résulte plus souvent d'un « tour de force ». La synthèse consiste à reconstruire le signal d'origine à partir des coefficients obtenus lors de l'analyse. Par analogie, on peut penser à la synthèse de l'urée (Friedrich Wöhler, 1828) qui a joué un rôle fondamental, car cela a permis d'établir un pont entre le monde de la chimie et celui du vivant.

a. La transformée de Fourier : Un « prisme mathématique »

On ne peut pas parler de l'analyse par ondelettes sans commencer par parler de l'analyse de Fourier dont elle découle. Nous devons l'analyse de Fourier au Mathématicien et Physicien Français Jean Baptiste

L'ESSENTIEL

Il s'agit de comprendre les concepts fondamentaux des ondelettes et en quoi elles diffèrent de l'analyse de Fourier, à travers des exemples simples. On pourra également apprécier les nombreuses applications des ondelettes dans divers domaines du traitement du signal et de l'image.

SYNOPSIS

It's a question of understanding the basics of wavelets and in what they differ from Fourier analysis, through simple examples. One will also be able to appreciate the numerous applications of the wavelets in many fields of signal treatment and image computing.

Joseph Fourier (1768-1830), considéré comme le fondateur de la physique mathématique. De 1802 à 1809, à Grenoble, il travaille sur la théorie de la propagation de la chaleur en modélisant l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, et rédige son « *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* ». En 1822, il publie son article fondateur « *Théorie analytique de la chaleur* » qui donnera naissance à l'analyse de Fourier.

L'analyse de Fourier est un des acquis majeurs de la physique et des mathématiques. Elle est incontournable en théorie et en traitement des signaux continus pour de nombreuses raisons.

La première est certainement *l'universalité du concept de fréquence* sur lequel elle est fondée : une description fréquentielle fournit un complément indispensable à la seule information temporelle (fournie par la sortie de capteurs par exemple) généralement utilisée en premier lieu pour l'analyse de signaux. La seconde raison tient à *la structure mathématique elle-même de l'analyse de Fourier* qui se prête très naturellement à des transformations de filtrage linéaire, en les traduisant de manière particulièrement simple. Une troisième raison enfin, plus pratique, est que l'ensemble de ces avantages a conduit au *développement de nombreux algorithmes et logiciels*, conférant à celle-ci la notoriété d'usage qu'on lui reconnaît aujourd'hui.

La transformée de Fourier (1) est une opération mathématique qui consiste à décomposer une fonction selon ses fréquences de même qu'un prisme décompose la lumière. Elle transforme une fonction originale $s(t)$ qui dépend du temps, en une nouvelle fonction $S(f)$ qui dépend de la fréquence. C'est une représentation fréquentielle *globale* du signal.

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2i\pi ft} dt \quad (1)$$

Dans la transformée de Fourier, on décompose le signal à étudier $s(t)$ selon une base d'exponentielles complexes, c'est-à-dire des *ondes éternelles* parfaitement délocalisées dans le temps. Une chose essentielle à retenir est que l'on peut, en sens inverse, reconstruire le signal $s(t)$ à partir de sa transformée de Fourier $S(f)$. On a en fait :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{2i\pi ft} df \quad (2)$$

Cependant, cette formule de reconstruction est *instable*, car les phases des nombres complexes $S(f)$ jouent un rôle essentiel et demandent à être connues avec une *très grande précision* pour que la formule de reconstruction (2) puisse donner une information sur le temps.

Pour illustrer ce phénomène, Barbara Burke Hubbard écrit [1] : « *Théoriquement, la phase ne semble pas compliquée. En réalité, il est impossible de déterminer les phases avec assez de précision pour en extraire l'information sur le temps. La fréquence du la du diapason, par exemple, est 440 hertz. Peut-on savoir, à partir de la transformée de Fourier de l'enregistrement d'une symphonie, si la est joué 20 minutes après l'ouverture ? Pour cela, il faudrait connaître sa phase avec une incertitude inférieure à $1 / (20 \cdot 60 \cdot 440)$, c'est-à-dire $1 / 528\,000$. La phase reste identique durant toute la symphonie, mais les erreurs d'arrondi s'additionnent cycle après cycle. Pour savoir où l'on en est dans le cycle, on doit diviser ce nombre par au moins cinq, ce qui donne $1 / 2\,640\,000$. Connaître la phase d'une seule fréquence équivaut à mesurer un kilomètre à moins d'un demi millimètre près* ».

La transformée de Fourier possède une très bonne résolution fréquentielle puisque la fonction analysante est une sinusoïde de fréquence précise, et quand on la multiplie par le signal, le coefficient obtenu ne se réfère qu'à cette fréquence. Cependant, elle ne permet pas d'analyser le *contenu fréquentiel local*, ni la *régularité locale* d'un signal. La question que l'on peut alors se poser est la suivante : « Est-il possible de rendre cette analyse locale ? ».

b. Vers une analyse de Fourier locale : la transformée de Fourier à fenêtre

En 1947, le Physicien Hongrois Denis Gabor (1900-1979) qui a reçu le Prix Nobel en 1971 pour l'invention de l'holographie, suggère de rendre locale l'Analyse de Fourier en s'aidant de fenêtres.

Qu'est-ce qu'une fenêtre ? Une fenêtre (ou *enveloppe*) est une fonction $g(t)$, régulière, lentement variable, et bien localisée temporellement (c'est-à-dire qui s'annule en dehors d'une certaine zone, que l'on appelle son *support*). Sa représentation graphique est un morceau de courbe qui délimite une zone contenant des oscillations. En général, on la choisit symétrique et réelle. Lorsque la fenêtre est *gaussienne*, on parle de *transformée de Gabor*. Une *gaborette* est l'association d'une fenêtre et d'oscillations internes.

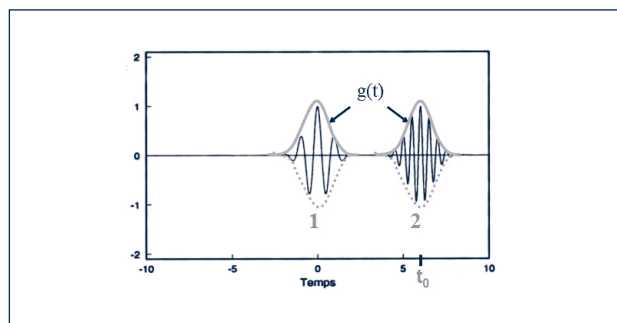


Figure 1. Exemple de deux gaborettes.

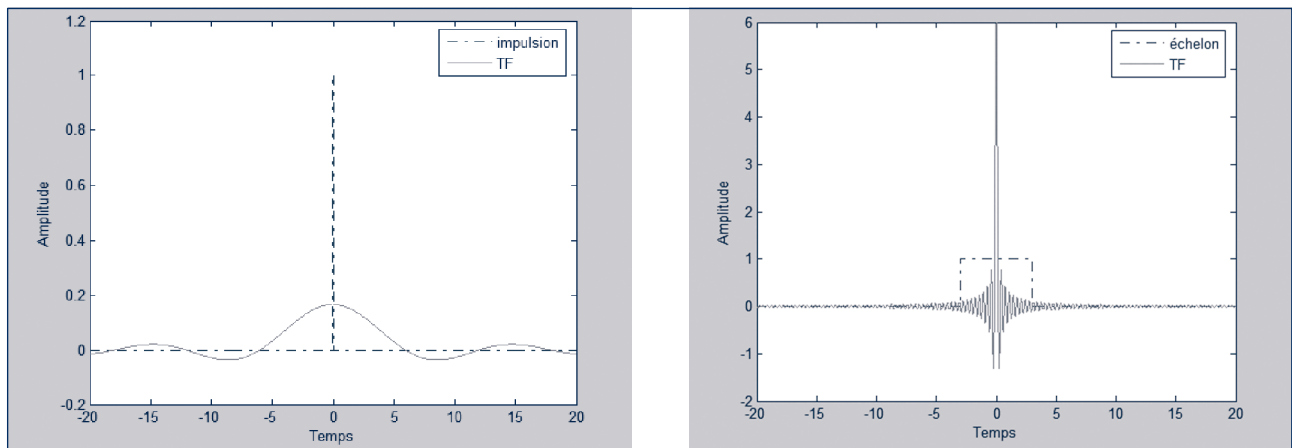


Figure 2. Illustration du principe d'Incertitude d'Heisenberg.

La transformée de Fourier à fenêtre (3) (aussi connue sous le nom de transformée de Fourier à court terme) permet d'analyser un signal à la fois en temps et en fréquence. On parle alors de transformée Temps-fréquence [6]. L'idée consiste à décomposer un signal $x(t)$ en fréquences, : de cette manière, on limite la plage de temps analysée. La taille de la fenêtre définit la taille de l'intervalle analysé. Elle ne change pas pendant l'analyse, mais on la remplit successivement d'oscillations de fréquences différentes (cf. fig. 1).

$$W(t_0, f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g(t-t_0)e^{-2i\pi f_0 t} dt \quad (3)$$

De la même manière que pour la transformée de Fourier, il est possible de reconstruire le signal $x(t)$ à l'aide des coefficients obtenus dans l'analyse. Ceci étant, la formule d'inversion (4) (synthèse) est immédiate et s'écrit :

$$x(t) = c \int \int g(t-t_0)e^{2i\pi f_0 t} W(t_0, f_0) dt_0 df_0 \quad (4)$$

où $c > 0$ est une constante numérique dont la valeur n'a pas d'importance ici.

Tandis que la transformée de Fourier classique compare le signal entier à des sinusoides de durée infinie et de diverses fréquences, la transformée de Fourier à fenêtre compare un segment du signal à des morceaux de courbes oscillantes de différentes fréquences. Quand on a analysé un segment (c'est-à-dire lorsque l'on a effectué une transformée de Fourier à l'intérieur de la fenêtre), on répète l'opération en faisant « glisser » la fenêtre le long du signal, pour en analyser un autre.

Cependant, le fait de garder constante la taille de la fenêtre d'analyse implique un sérieux compromis. Avec une fenêtre étroite, on localise plutôt bien les

composantes transitoires de hautes fréquences mais on devient alors aveugle aux composantes de longue durée, donc de basse fréquence, car la période du phénomène observé est trop grande pour rentrer dans une petite fenêtre. A l'inverse, quand une fenêtre est large, on ne peut préciser l'instant où se produit un changement brutal dans le signal (pic ou discontinuité) : cette information est noyée dans la totalité de l'information correspondant à l'intervalle de temps sélectionné par la fenêtre.

Ce compromis peut être relié au principe d'Incertitude d'Heisenberg concernant la dualité onde-corpuscule. Dans son papier « *Uncertainty paper* » (1927), Heisenberg écrit qu'une particule élémentaire n'a pas simultanément une position et une quantité de mouvement précises. Cet énoncé, rapporté au domaine du traitement du signal, signifie qu'un signal n'a pas simultanément une localisation précise en temps et en fréquence.

La figure 2 permet de mieux comprendre le principe d'Incertitude d'Heisenberg. À gauche, on considère l'impulsion $s(t) = 1\left[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right], a = \frac{1}{6}$

qui est bien localisée en temps. On voit bien que sa transformée de Fourier $S(f) = \text{sinc}_c(af)$ est délocalisée en fréquence. À droite, on « élargit » le signal $s(t)$ en prenant $a = 6$, de manière à construire un échelon, un peu moins bien localisé en temps. Cette fois-ci, la transformée de Fourier est quasiment centrée en 0, donc mieux localisée en fréquence !

L'analyse par gaborettes a pour objet de déployer le signal dans le plan temps-fréquence. Cela résout le problème de la dictée musicale (qui consiste à écrire la partition en entendant la musique), mais toutes les notes ont alors la même durée puisque la taille de la fenêtre d'analyse reste constante.

Nous venons donc de comprendre que garder constante la taille de la fenêtre durant l'analyse d'un signal ne nous donnait pas la totalité des informations : il faut faire un choix entre la localisation des hautes

fréquences ou la localisation des basses fréquences. Il a donc fallu trouver un outil induisant une méthode de reconstruction qui soit indépendante de l'échelle d'analyse. Ce nouvel outil s'appelle *les ondelettes*.

3. Les ondelettes

a. La naissance des ondelettes

Yves Meyer* a recensé au moins 15 origines distinctes de la théorie des ondelettes, quelques-unes remontant jusqu'en 1930. La communauté des physiciens de l'époque était intuitivement consciente de l'existence des ondelettes, depuis un article datant de 1971, de Kenneth Wilson, lauréat du prix Nobel, qui décrit la renormalisation. En mathématique, on employait les ondelettes sous le nom de « décompositions atomiques » (sortes de briques de construction), pour étudier des différents espaces fonctionnels. D'autres chercheurs ont développé des ondelettes - sous le nom de « fonctions autosimilaires de Gabor » - pour modéliser le système visuel humain.

Cependant, on peut prendre comme point de départ l'année 1975 et les travaux de l'ingénieur géophysicien Français Jean Morlet, qui travaillait pour Elf-Aquitaine et qui créa les ondelettes pour chercher du pétrole sous terre. En 1960, la méthode standard de détection du pétrole sous terre, consiste à envoyer des vibrations dans la terre et à analyser les échos. De cette manière, on tente de déterminer la profondeur des diverses couches de pétrole, leur épaisseur et leur constitution, les échos de hautes fréquences correspondant grossièrement aux couches minces.

Dans ses travaux, Jean Morlet est souvent confronté à de très nombreuses couches : tous les signaux de réflexion interfèrent entre eux et il lui est donc difficile de les séparer. Jusque là, il utilise l'analyse de Fourier et des ordinateurs de plus en plus puissants. Puis, il utilise des fenêtres de différentes tailles, avec pour objectif d'essayer d'avoir une définition locale plus fine, de manière à accéder à des informations sur des couches d'épaisseurs différentes, sans succès... Vers 1975, Morlet s'inspire de l'analyse de Fourier à fenêtre proposée par Gabor 30 ans plus tôt. Malheureusement, cette représentation demeure imprécise sur le temps aux hautes fréquences.

C'est alors que Morlet a une idée géniale. Au lieu de garder fixe la taille de la fenêtre et de faire varier le nombre d'oscillations à l'intérieur de cette fenêtre, il fait l'inverse : il garde constant le nombre d'oscillations et fait varier la taille de la fenêtre, l'étirant et la comprimant

telle un accordéon (cf. fig. 4). Étirer la fenêtre a pour effet d'étirer les oscillations, donc de baisser leur « fréquence », la comprimer a pour effet de comprimer les oscillations, donc d'augmenter leur « fréquence ». Les ondelettes étaient nées.

b. Qu'est-ce qu'une ondelette ?

Selon Yves Meyer, « c'est le signal transitoire le plus simple que l'on puisse imaginer ». Une ondelette est un objet mathématique relativement simple : il s'agit d'une fonction Ψ , localisée (par exemple, nulle hors d'un certain intervalle) et oscillante (cf. fig. 3). On demande au moins que l'intégrale de Ψ soit nulle, mais on souhaite souvent que $0 = \int t \psi(t) dt = \dots = \int t^{N-1} \psi(t) dt$, pour un certain entier $N \geq 2$.

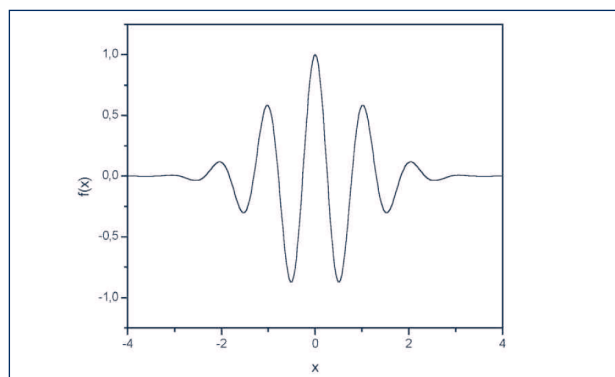


Figure 3. Ondelette de Morlet.

Il faut savoir qu'il existe de nombreuses ondelettes. Certaines ont des formules mathématiques explicites alors que d'autres sont construites à partir de propriétés mathématiques plus complexes.

Chaque ondelette possède des qualités bien spécifiques comme la *symétrie*, qui est utile pour éviter le déphasage, le *nombre de moments nuls* (c'est-à-dire le nombre d'oscillations) utile pour la compression, la *régularité*, utile pour obtenir des signaux reconstruits lisses et réguliers.

Par défaut, lorsqu'on emploie le terme d'ondelette, il faut entendre *ondelette mère* Ψ car elle va servir de prototype de base pour générer toute une famille d'ondelettes $\Psi_{a,b}$ (les *ondelettes filles*), aussi appelées *atomes de base*. Ce sont des copies dilatées, comprimées et translattées dans le temps de l'ondelette mère. D'où la formule suivante d'un atome de base :

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a \in \mathbf{R}^+, b \in \mathbf{R} \quad (5)$$

* Yves Meyer est professeur émérite à l'École Normale Supérieure de Cachan, Membre de l'Académie des Sciences depuis 1993. Spécialiste de l'analyse harmonique, il a découvert les ondelettes orthogonales.

Donnons maintenant quelques explications concernant la formule (5) : nous voyons apparaître deux paramètres a et b . Le paramètre $a > 0$ est le *paramètre d'échelle*, c'est lui qui va agir sur la compression ou la dilatation de l'atome de base. Lorsque $0 < a < 1$, l'atome de base est comprimé et lorsque $a > 1$, l'atome de base est dilaté. Le paramètre b est le *paramètre de position*, il permet de faire translater notre atome de base à gauche ($b < 0$) ou à droite ($b > 0$), le long du signal à analyser. Reste le facteur en $1/\sqrt{a}$ qui permet de conserver la même énergie de l'atome de base à chaque échelle a . En fait, il convient de préciser que *l'inverse d'une échelle est une fréquence* (au niveau des ordres de grandeur).

Ainsi plus l'ondelette fille est dilatée (a devient donc de plus en plus grand), plus son amplitude et sa « fréquence » diminuent. À l'inverse, plus l'ondelette fille est comprimée (a devient donc de plus en plus petit), plus son amplitude et sa « fréquence » augmentent (cf. fig. 4).

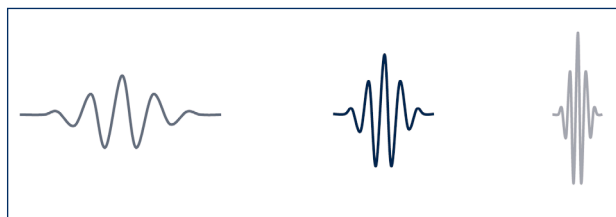


Figure 4. Trois ondelettes filles de Morlet : dilatée (gauche), échelle de base (milieu) et comprimée (droite). Ceci illustre l'expression d'« accordéon » utilisée lors de l'introduction.

c. La transformée en ondelettes : Un « microscope mathématique »

Une manière pratique d'introduire la transformée en ondelettes consiste à établir une *analogie avec la*

musique. De la même manière que les notes de musique possèdent une certaine hauteur et une durée, les ondelettes oscillent à une certaine fréquence et pendant un temps limité. Prenons l'exemple d'un extrait d'une partition musicale représentant les premières notes de *La Lettre à Élise* de Ludwig Van Beethoven.



Figure 5. Neuf premières notes de *La Lettre à Élise* de Ludwig Van Beethoven.

L'expérience consiste à comparer la transformée de Fourier et la transformée en ondelettes de l'extrait musical, afin de mettre en avant quelques remarques préliminaires concernant l'apport de l'analyse par ondelettes.

Sur la figure 6, les raies de la transformée de Fourier nous indiquent quelles sont les notes qui sont présentes dans l'extrait musical, en nous renseignant précisément sur leurs fréquences ; on ne sait cependant pas l'ordre dans lequel les notes sont jouées. Ces *raies verticales* se retrouvent à droite dans le scalogramme, sous la forme de *bandes horizontales* (parce que les fréquences sont maintenant en ordonnées). En outre, ces fréquences sont localisées en temps (ce qui est un « plus »). Mais *le prix à payer* est la perte de localisation fréquentielle. Ce qu'on gagne d'un côté est perdu de l'autre (cf. fig. 7).

Enfin, il est très intéressant de remarquer que le scalogramme qui résulte de la transformée en ondelettes tend vers la représentation idéale qu'est la partition musicale. D'une certaine manière, les ondelettes peuvent être assimilées aux « notes mathématiques » d'un morceau de musique.

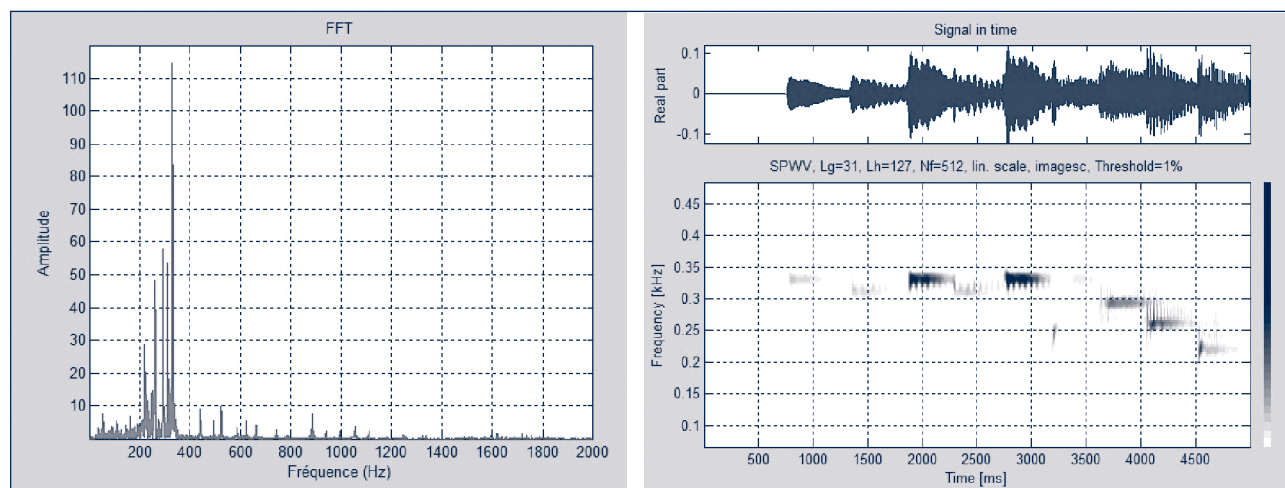


Figure 6. À gauche, la transformée de Fourier. En haut à droite, l'onde sonore de l'extrait musical. En bas à droite, la transformée en ondelettes avec en abscisses, le temps, en ordonnées, la fréquence.

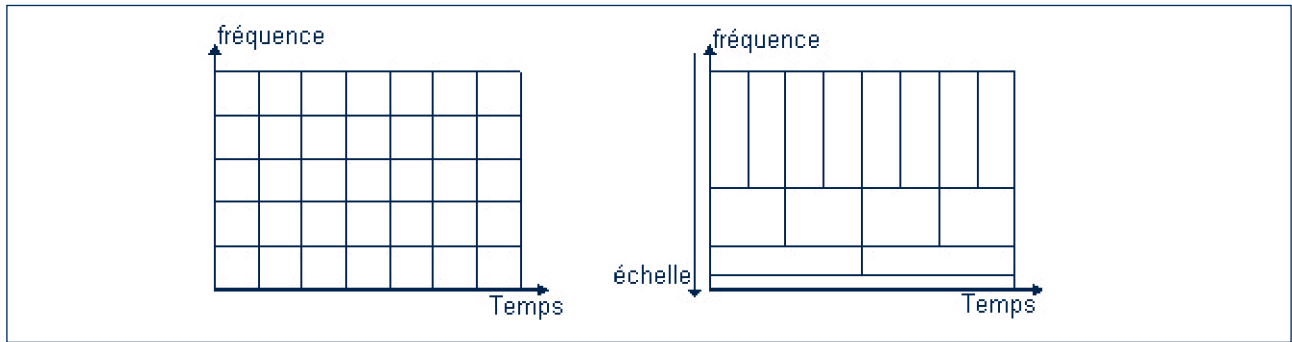


Figure 7. Comparaison des plans temps-fréquence (transformée de Gabor), à gauche, et temps-échelle (transformée en ondelettes), à droite. Dans la transformée de Gabor, la résolution fréquentielle ne diminue pas lorsque la fréquence varie. Dans la transformée en ondelettes, on peut voir que l'on possède une bonne résolution fréquentielle aux basses fréquences (au détriment d'une perte de localisation en temps) et que, à l'inverse, on possède une bonne résolution temporelle aux hautes fréquences (au détriment d'une perte de localisation en fréquence). Ce pavage du plan temps-fréquence permet d'identifier ce que l'on appelle les boîtes d'Heisenberg.

La transformée (continue) en ondelettes (6) est une opération mathématique qui consiste à transformer une fonction originale $f(t)$ qui dépend du temps, en une nouvelle fonction $C_f(a,b)$ qui dépend à la fois de l'échelle et du temps.

$$C_f(a,b) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \quad (6)$$

Dans la transformée en ondelettes, on décompose le signal à étudier $f(t)$ selon une base de fonctions d'ondelettes localisées dans le temps. On obtient alors des coefficients numériques $C_f(a,b)$: les coefficients d'ondelettes. Le calcul de ces coefficients est analogue à celui que l'on effectue lors d'une transformée de Fourier : on multiplie le signal par la fonction analysante puis on calcule l'intégrale du produit.

On notera que l'on prend le conjugué de l'ondelette afin de pouvoir opérer une reconstruction exacte lors de la transformée inverse (7). Cette synthèse s'effectue par la formule suivante :

$$f(t) = c \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_f(a,b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2} \quad (7)$$

Où $c > 0$ est une constante qui ne dépend que de Ψ .

Un coefficient d'ondelette a une amplitude d'autant plus grande que l'ondelette « ressemble » au signal sur la portion analysée. Tous ces coefficients sont représentés dans ce que l'on appelle un scalogramme (équivalent du spectrogramme pour Fourier), avec le temps en abscisses et la fréquence (ou l'échelle) en ordonnées (cf. scalogramme d'un chirp linéaire, en bas à droite de la fig. 8).

Contrairement à la transformée de Fourier, la transformée en ondelettes est une analyse locale de résolution temporelle variable des signaux. Il faut comprendre par là qu'elle permet de décrire le comportement local des signaux à différentes échelles de temps. On parle alors d'analyse multirésolution.

Les ondelettes s'adaptent aux différentes composantes du signal. Lorsque la fenêtre est étroite, on peut observer les hautes fréquences et lorsque la fenêtre est plus large, on observe les basses fréquences. Cette aptitude à pouvoir « zoomer » sur les zones d'instationnarités d'un signal confère à la transformée en ondelettes l'expression de « microscope mathématique ».

À titre d'exemple, revenons à la figure 8 et à ce que l'on a appelé un chirp linéaire. Il s'agit d'un signal dont la fréquence augmente linéairement avec le temps. Voici ce que l'on obtient en comparant la densité spectrale d'énergie (DES), qui est le carré du module de la transformée de Fourier, et le scalogramme de Morlet d'un chirp linéaire dont la fréquence normalisée (au sens de Shannon) varie linéairement de 0.1Hz à 0.4Hz.

Néanmoins, les ondelettes de Morlet ne constituent que l'un des outils à l'intérieur d'une immense boîte à outils dont fait partie l'analyse de Fourier. En fait, la détection optimale d'un chirp linéaire se fait à

* La transformée de Wigner-Ville fournit une décomposition temps-fréquence sans aucune restriction sur les résolutions temporelles et fréquentielles. Elle est définie par : $s(t + \frac{\tau}{2}) s(t - \frac{\tau}{2}) e^{-2i\pi f \tau}$. Cette formule représente l'énergie d'un signal s au temps t et à la fréquence f . Malheureusement, la non-linéarité de cette transformée a des conséquences désastreuses qui se manifestent par l'apparition d'interférences. Une solution consiste à adoucir localement la rigueur de la résolution. On parle alors de transformée de Wigner-Ville lissée.

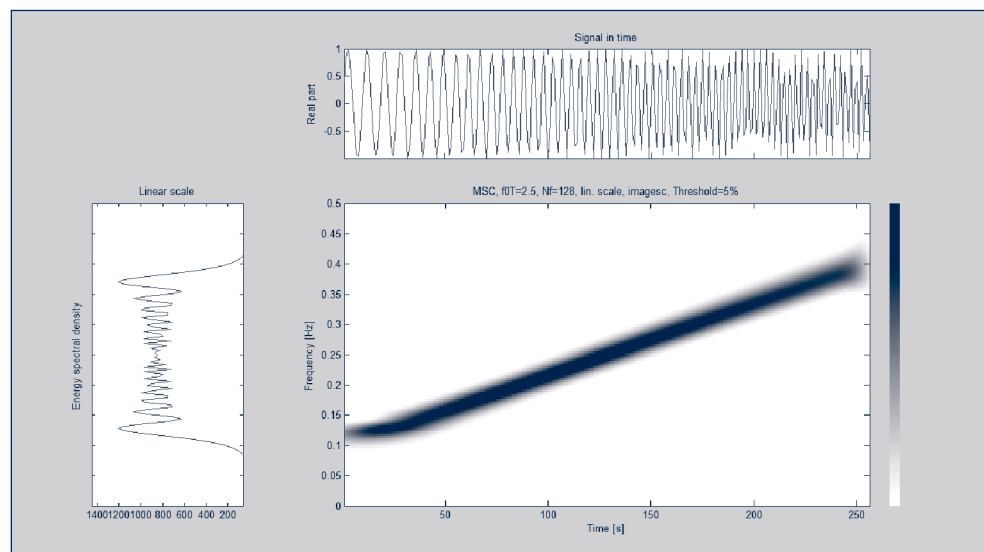


Figure 8. En haut, le chirp linéaire étudié. À gauche, la DSE. À droite le scalogramme. Le caractère fréquentiel linéaire du chirp n'est bien visible qu'avec la transformée en ondelettes. (L'amplitude des coefficients va du plus faible – couleur claire -, au plus fort – couleur foncée -).

l'aide de ce qu'on appelle l'*analyse de Wigner-Ville** (datant des années 40 !). Ceci montre que l'outil doit être *adapté* à la *classe des signaux* que l'on souhaite analyser. Une belle réponse est donnée par Bruno Torrèsani dans son travail sur les signaux audio. Il utilise deux bases différentes : les *bases trigonométriques locales* (pour les parties stationnaires par morceaux, les voyelles par exemple) et les *ondelettes* (pour représenter les consonnes plosives). En traitement de l'image, on peut grossièrement distinguer les *objets* (délimités par les bords) ayant une *structure géométrique simple* et les *textures* (par exemple, un champ de blé est une texture différente d'un champ de seigle). Bien entendu, les ondelettes de Morlet sont *incapables* d'analyser les textures (de distinguer le seigle du blé). Finalement, en ce qui concerne les images, les ondelettes conviennent aux objets ayant des structures géométriques, mais pas aux textures.

4. Applications des ondelettes

a. Les ondelettes : un outil polyvalent

Les ondelettes sont employées dans un grand nombre de domaines. On peut citer, entre autres, la géophysique, l'astrophysique, les signaux sonores en médecine, l'imagerie dans tous ses aspects et l'imagerie médicale en particulier, l'imagerie satellitaire, le codage de signaux vidéo, la modélisation du trafic dans les réseaux de communication comme Internet, l'analyse de la turbulence atmosphérique ou celle de souffleries, et la liste est encore longue. La variété des secteurs concernés et le nombre de problèmes traités sont surprenants. La question que l'on peut tout de suite se

poser est la suivante : « Comment se fait-il qu'un même outil fonctionne pour tant d'applications ? ». Puisque qu'il est impossible de trouver une unique réponse qui soit réellement satisfaisante, nous allons donner quelques raisons qui paraissent plausibles :

- Tout d'abord, la méthode des ondelettes est nouvelle en traitement du signal. Elle apporte des *innovations techniques* et permet la construction d'un nouveau *dictionnaire de formes*, reliant des caractéristiques du signal à celles des transformées en ondelettes, permettant d'interpréter des propriétés des signaux à partir des structures des coefficients. On sait par exemple, que les coefficients nuls dans une décomposition discrète indiquent que le signal est lisse et que rien ne change.
- Ensuite, *la technique des ondelettes constitue en outre un outil d'analyse locale*, en quoi elle diffère fortement d'une analyse de Fourier. L'ondelette sait porter son regard localement en inspectant les voisinages d'un point. Les informations codées dans les coefficients sont alors entièrement déterminées par les valeurs du signal situées dans le champ de l'ondelette. Ce travail local est complété par un travail de synthèse qui réalise la comparaison des résultats obtenus en différents points. On globalise en quelque sorte les analyses locales.
- De plus, les ondelettes *analysent le signal échelle par échelle*. Elles servent de véritable « microscope mathématique » en regardant le signal à différentes résolutions. Chaque point est ausculté, très

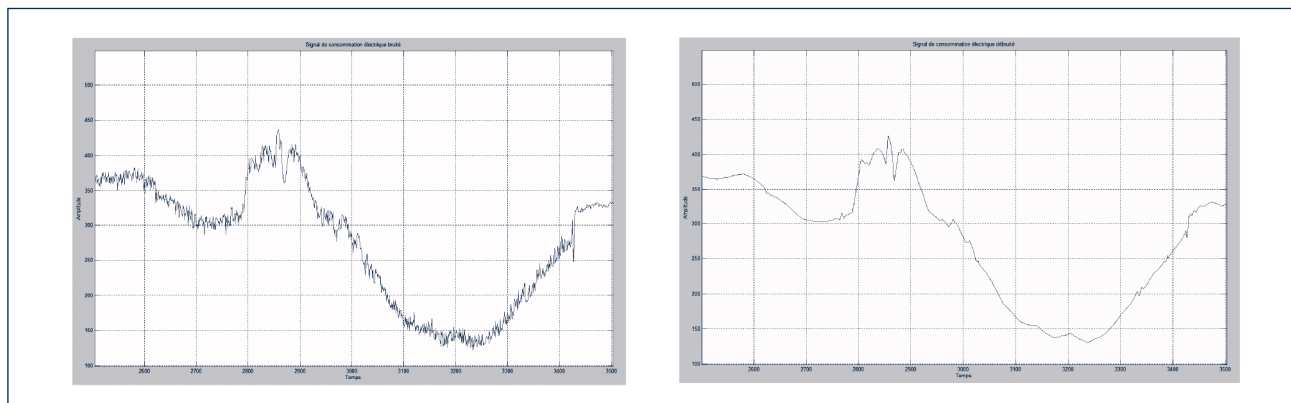


Figure 9. Débruitage par ondelettes d'un signal de consommation électrique. À gauche : avant, à droite : après.

finement à petit échelle dans une petite zone et plus grossièrement à grande échelle.

- Enfin, les ondelettes permettent de *caractériser certains espaces de signaux un peu ignorés jusque là* parce que difficiles à manipuler. Ces espaces contiennent des fonctions qui peuvent présenter des parties moins régulières que les fonctions dérivables, séparées par des discontinuités. Ces signaux sont difficiles à aborder par les autres outils actuellement disponibles.

b. Panorama de quelques applications des ondelettes

La capacité des ondelettes à faire ressortir les variations d'un signal peut être exploitée de diverses manières.

En *géophysique*, les chercheurs de l'Institut de Physique du Globe, à Paris, utilisent les ondelettes pour étudier le minuscule effet sur la vitesse de rotation de la Terre du courant *El Niño*, qui longe le Pérou.

En *mécanique*, on tente d'exploiter les ondelettes pour repérer les défauts dans les engrenages, en analysant les vibrations. La conclusion de toutes les études est que l'analyse de Wigner-Ville est optimale pour résoudre ce type de problèmes.

En *imagerie médicale*, on exploite le fait que la présence d'erreurs dans une transformée en ondelettes n'altère pas toute la transformée. Quand on utilise l'analyse de Fourier en imagerie par résonance magnétique (IRM), le moindre mouvement de la partie étudiée du corps transforme l'image. Le mathématicien Dennis Healy Jr. et le radiologue John Weaver à Dartmouth College (New Hampshire), ont montré qu'avec les ondelettes, ces erreurs sont très réduites.

En *astronomie*, les ondelettes servent à étudier la distribution de la matière à grande échelle dans l'Univers. Selon l'astrophysicien français Albert Bijaoui, une meilleure connaissance de cette structure est nécessaire aux théoriciens qui veulent tester les divers scénarios de l'évolution de l'Univers ; une première tâche consiste à faire l'inventaire des galaxies de l'Univers. Puisque les ondelettes identifient les structures aux différentes échel-

les, elles sont capables de distinguer une étoile d'une galaxie, ce qui n'est pas toujours évident.

En *biométrie*, on utilise les ondelettes dans un algorithme de reconnaissance du visage appelé *Elastic Bunch Graph Matching* [13], en convoluant certains points caractéristiques du visage (milieu des yeux, du nez, de la bouche, etc.) avec de nombreuses ondelettes paramétrées (Wiskott & al.) afin d'extraire différents coefficients qui pourront ensuite être utilisés pour vérifier la ressemblance entre deux visages.

En *séismologie*, on tente de détecter les séismes en identifiant de façon automatique, différentes composantes usuellement appelées P et S d'un signal de séisme, court et instationnaire, en se servant des ondelettes comme outil de reconnaissance de forme.

Dans le domaine des *sciences biomédicales*, les ondelettes entrent dans un processus visant à découvrir un dysfonctionnement, à comparer du normal à de l'anormal et à améliorer les informations recueillies pour assurer un travail plus clair. Le secteur biomédical se caractérise par la présence d'une grande variabilité dans les signaux disponibles. Les enregistrements sont souvent complexes : mélanges de signaux localisés comme des *spikes* (pics) en EEG (électro-encéphalogramme) et de signaux diffus comme le bruit de fond cardiaque ou l'écoulement sanguin. Le signal cardiaque se décompose en séquences dont la plus importante est appelée le complexe QRS. Le repérage de forme par ondelettes permet la discrimination de *patterns* normaux et anormaux. Les ondelettes testées sur une base de données usuelle s'avèrent avoir un taux de détection excellent [14]. Alors que les autres méthodes ne pouvaient les repérer, les ondelettes détectent bien de petits signaux de fréquence assez grande apparaissant dans les maladies coronariennes, des infarctus ou des arythmies ventriculaires.

Concernant les *nanotechnologies*, et plus particulièrement dans le domaine de l'analyse d'hétérostructures en couches minces par réflectométrie et diffraction des rayons X pour l'optoélectronique, il a été montré [11] que les ondelettes permettaient d'effectuer une analyse non destructive de ces matériaux, donnant non seule-

ment l'épaisseur des couches nanométriques mais aussi, dans certains cas, l'ordre d'empilement des couches. L'utilisation de la transformée de Fourier ne permettait pas d'extraire les informations d'un profil à grande dynamique avec de très nombreuses zones d'instationnarités et encore moins de donner l'ordre des couches.

Passons maintenant au *débruitage*. Les ondelettes fournissent des moyens simples et efficaces d'estimer de façon non linéaire des signaux, en présence de bruit. La procédure est simple : on transforme le signal en ondelettes ; on élimine, à toutes les résolutions, les coefficients supérieurs à une valeur seuil et on reconstruit le signal avec les coefficients qui restent grâce à une transformée inverse en ondelettes. La chose qui est surprenante est que cette méthode exige bien peu de connaissances sur le signal. Traditionnellement, il faut connaître assez précisément le signal pour pouvoir l'extirper du bruit. En particulier, avec les méthodes traditionnelles, on était censé deviner le type de régularité du signal. Avec les ondelettes, ceci n'est plus nécessaire : cette performance vient du fait que la transformation en ondelettes orthogonales* comprime l'énergie du signal en un nombre assez restreint de gros coefficients, comme si elle rangeait le signal dans quelques compartiments. Elle ne peut toutefois pas ranger le bruit blanc qui est trop « désordonné ». L'énergie du bruit blanc est donc dispersée sur toute la transformée et donne des coefficients petits qu'on élimine. Précisons enfin que le débruitage par ondelettes est très performant pour des signaux constitués à la fois de parties lisses et de zones présentant des irrégularités et des variations brusques (cf. fig. 9). Les méthodes classiques sont incapables d'une telle adaptation en temps.

Terminons avec la *compression*. L'algorithme de base est très semblable à celui du débruitage. Partant du signal à comprimer, on le décompose d'abord sur une base orthogonale d'ondelettes au moyen de la transformée discrète. Ensuite, on sélectionne une partie des coefficients par *seuillage dur*, en conservant intact les coefficients d'approximation de niveau convenablement choisis. Enfin, à partir des coefficients seuillés, on reconstruit le signal original en leur appliquant la transformée discrète inverse. Le signal ainsi obtenu est le signal comprimé. Le standard de compression d'image bien connu qu'est le JPEG est basé sur une transformée de Fourier discrète.

Le JPEG analyse l'image par bloc de 8 x 8 pixels

ce qui conduit aux fameux effets de mosaïques que nous avons tous vus au moins une fois, et qui altère considérablement la qualité de l'image compressée. Ce défaut est d'autant plus visible que le taux de compression est élevé.

Le nouveau standard à venir en compression d'image est le JPEG 2000 [15] (Yves Meyer) et qui est basé sur la transformée en ondelettes. Cette fois-ci, l'image est analysée de manière globale et la qualité reste très bonne même à un taux de compression élevé. A titre d'exemple, si l'on considère une image originale de 512 x 512 pixels et d'une taille de 786 Ko, il est très difficile de voir la différence avec la même image compressée par ondelettes d'un ratio de 75:1 et dont la taille atteint seulement 10.6 Ko. Grâce au JPEG 2000, il est non seulement possible de prévoir la taille du fichier compressé mais aussi de permettre un affichage progressif de l'image. On commence par les détails grossiers de l'image puis les hautes fréquences sont progressivement ajoutées, ce qui a pour effet d'ajouter les détails de plus en plus fin, jusqu'à l'image finale.

5. Conclusion et perspectives

En moins de 20 ans, les ondelettes se sont imposées comme une théorie mathématique féconde et un formidable outil de traitement du signal et de l'image. La théorie des ondelettes vient compléter de manière très efficace, l'analyse de Fourier utilisée depuis deux siècles. Les ondelettes constituent un outil polyvalent qui trouve des applications dans des domaines aussi riches que variés comme la géophysique, l'astrophysique, la biométrie, les sciences biomédicales, les nanotechnologies, etc. Elles ont également ouvert des champs d'investigation nouveaux et ont pu résoudre des problèmes qui ne trouvaient pas de solutions dans les méthodes actuelles. Les ondelettes sont très performantes pour trois problèmes généraux en traitement du signal : l'analyse, le débruitage et la compression, en particulier la compression d'images dont le JPEG 2000 sera très bientôt le nouveau standard, remplaçant définitivement l'actuel JPEG. Cependant, aucun outil n'étant infaillible, on parle déjà d'améliorations et de variantes des ondelettes sous les termes de « ridgelets » (D. Donoho), « contourlets » (Do et Vetterli) ou encore « bandelets » (Stéphane Mallat et sa start-up *Let It Wave*). Ces dernières épousent, le plus longtemps possible, le tracé des bords des images et permettent de stocker une photo d'identité dans seulement 500 octets, et ce avec

* Si l'on doit calculer, en temps réel, la transformée de Fourier d'un signal de longueur N ou d'une image composée de 5 megapixels, on doit utiliser un algorithme rapide. Sinon, le calcul de la transformée de Fourier de l'image demanderait 25 000 milliards d'opérations ! L'algorithme rapide mais exact (découvert par Cooley et Tuckey en 1965) s'appelle la *FFT* (Fast Fourier Transform). En ce qui concerne la transformée en ondelettes, l'algorithme rapide s'appelle la *FWT* (Fast Wavelet Transform) et repose sur l'existence de bases orthonormées d'ondelettes.

une qualité nettement supérieure à celle obtenue avec une compression classique par ondelettes.

Remerciements

L'auteur tient à remercier sincèrement deux personnes. Tout d'abord, M. Jacques Girard pour ses critiques constructives, sa disponibilité et son suivi constant. Puis, M. Yves Meyer, qui a su faire preuve d'une écoute et d'une gentillesse rares, et dont les remarques et les conseils précieux ont très largement contribué à l'élaboration de cet article.

Références

- [1] B. B. HUBBARD, « *Ondes et ondelettes : La saga d'un outil mathématique* », Belin, 1995.
- [2] M. MISITI, Y. MISITI, G. OPPENHEIM, J-M. POGGI, « *Les ondelettes et leurs applications* », Lavoisier, 2003.
- [3] S. MALLAT, « *Une exploration des signaux en ondelettes* », Éditions de l'École Polytechnique, 2000.
- [4] B. TORRÉSANI, Y. MEYER, « *Analyse continue par ondelettes* », CNRS Éditions - EDP Sciences, 2000.
- [5] J-P. KAHANE, P. G. LEMARIÉ-RIEUSSET, « *Séries de Fourier et ondelettes* », Cassini - Nouvelle Bibliothèque Mathématique ; 3, 1998.
- [6] P. FLANDRIN, « *Temps-fréquence* », 2^{ème} édition - Hermès, 1998.
- [7] P. ABRY, P. FLANDRIN, « *Ondelettes et Turbulences* », Diderot Éditeur, Arts & Sciences, 1997.
- [8] A. GROSSMANN et B. TORRÉSANI, <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~torresan/universalis/ondel.html>, 2001.
- [9] B. PESQUET-POPESCU, J-C. PESQUET, « *Ondelettes et applications* », Techniques de l'Ingénieur, traité Télécom, 2001.
- [10] N. MORIZET, « *Les Ondelettes : Origines, Principes et Applications* », Conférence ISEP/SEE, 26 mai 2005.
- [11] O. DURAND, N. MORIZET, « *Fourier-Inversion and Wavelet-Transform Methods Applied to X-ray Reflectometry and HRXRD Profiles from Complex Thin-Layered Hetero-Structures* », Applied Surface Science, 2006.
- [12] Le site de la communauté anglophone des ondelettes : <http://www.wavelet.org>
- [13] L. WISKOTT, J-M FELLOUS, N. KRÜGER et C. VON DER MALSBURG, « *Face Recognition by Elastic Bunch Graph Matching* », IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 19(7):775-779, 1997.
- [14] H. DINH, D. KUMAR, N. PAH et P. BURTON, « *Wavelets for QRS Detection* », Proceedings of the 23rd Annual IEEE/EMBS International Conference, Istanbul, Turkey, 2001.
- [15] Site de l'EPFL sur le JPEG 2000 : <http://sawwww.epfl.ch/SIC/SApublications/FI01/fi-3-1/3-1-page1.html>

L' a u t e u r

Nicolas Morizet est diplômé de l'Institut Supérieur d'Électronique de Paris (ISEP) et prépare actuellement un doctorat de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications de Paris (ENST), en biométrie. Il est membre du Club 21 de la SEE, *IEEE Student Member* et est également moniteur d'enseignement des travaux pratiques de traitement du signal à l'ISEP. En 2004, il intègre le Laboratoire d'Analyses Physiques Avancées (LAPA) de Thales R&T, afin d'étudier l'utilisation de la transformée en ondelettes pour l'analyse de profils de réflectométrie et de diffraction des rayons x. En 2005, il donne une conférence en partenariat avec la SEE et l'ISEP, intitulée « *Ondelettes : Origines, Principes et Applications* ». En 2006, ses activités de recherche portent sur l'identification multimodale par fusion de signatures biométriques du visage et de l'iris ; il consacre enfin une part importante de ses travaux à l'étude des ondelettes et en particulier leur utilisation en reconnaissance du visage.